

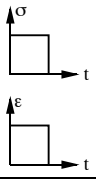
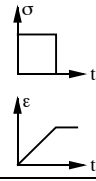
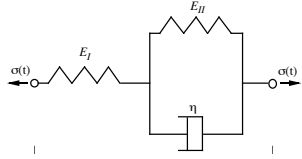


## Formulaire de rhéologie

### Rhéologie des solides – modèles viscoélastiques

ressort		amortisseur	
	$\sigma_r = E \varepsilon_r$		$\sigma_a = \eta \frac{d\varepsilon_a}{dt}$
			
Modèle de Maxwell (série)		Modèle de Kelvin (parallèle)	
Equation constitutive	$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{E} \frac{d\sigma}{dt} + \frac{1}{\eta} \sigma$	Equation constitutive	$\sigma = E \varepsilon_r + \eta \frac{d\varepsilon_a}{dt}$
Fluage	$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E} \left( 1 + \frac{t}{\tau_\sigma} \right)$ où $\tau_\sigma = \eta/E$	Fluage	$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E} \left( 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_\sigma}\right) \right)$ où $\tau_\sigma = \eta/E$
Recouvrance	$\varepsilon(t > t_1) = \text{constante}$	Recouvrance	$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E} \left[ 1 - \exp\left\{-\frac{t_1}{\tau_\sigma}\right\} \right] \exp\left\{-\frac{t-t_1}{\tau_\sigma}\right\}$
Relaxation	$\sigma(t) = \sigma_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau_\varepsilon}\right)$ où $\tau_\varepsilon = \eta/E$	Relaxation	$\sigma(t) = \text{constante}$
Modèle SLSM			
Equation constitutive : $\sigma + \tau_\varepsilon \dot{\sigma} = E_R \varepsilon + E_I \tau_\varepsilon \dot{\varepsilon}$			
$E_R = \frac{E_I E_{II}}{E_I + E_{II}} \quad \tau_\sigma = \eta/E_{II} \quad \tau_\varepsilon = \eta/(E_I + E_{II})$			
Fluage : $J(t) = \frac{1}{E_I} + \frac{1}{E_{II}} \left[ 1 - \exp\left\{-\frac{t}{\tau_\sigma}\right\} \right] = \frac{1}{E_R} + J_V(t)$		Relaxation : $R(t) = \frac{E_I E_{II}}{E_I + E_{II}} \left[ 1 + \frac{E_I}{E_{II}} \exp\left\{-\frac{t}{\tau_\varepsilon}\right\} \right] = E_R + R_V(t)$	
Recouvrance de la déformation (pour $t > t_1$ ) : $\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E_{II}} \left[ 1 - \exp\left\{-\frac{t_1}{\tau_\sigma}\right\} \right] \exp\left\{-\frac{t-t_1}{\tau_\sigma}\right\}$			

### Formules générales (Boltzmann)

Sollicitation en contrainte :  $\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^t J(t-\tau) \frac{d\sigma}{d\tau} d\tau$  où  $J(t) = J + J_V(t)$  avec  $J = 1/E_R$

Sollicitation en déformation :  $\sigma(t) = \int_{-\infty}^t R(t-\tau) \frac{d\varepsilon}{d\tau} d\tau$  où  $R(t) = E_R + R_V(t)$

### Essais harmoniques

$\varepsilon = \varepsilon_0 \sin(\omega t) \Rightarrow \sigma = \sigma_0 \sin(\omega t + \delta)$  et  $\gamma = A \sin(\omega t) \Rightarrow \tau = \tau_0 \sin(\omega t + \delta)$  où  $\delta$  angle de perte ou déphasage

Module de stockage  $G' = \cos(\delta) \frac{\tau}{\gamma}$  ; module de perte  $G'' = \sin(\delta) \frac{\tau}{\gamma}$  ; module complexe  $G^* = \sqrt{G'^2 + G''^2}$  ;  $\tan(\delta) = G''/G'$

Viscosités :  $\eta' = G'/\omega$  ;  $\eta'' = G''/\omega$  ;  $\eta^* = G^*/\omega$

SLSM sous contrainte sinusoïdale :  $\sigma = \sigma_0 \sin(\omega t) \Rightarrow \varepsilon = \sigma_0 (J' \sin(\omega t) - J'' \cos(\omega t))$

$$J' = \frac{1}{E'} = \frac{1}{E_I} + \frac{1}{E_{II}(1 + \omega^2 \tau_\sigma^2)} \quad ; \quad J'' = \frac{1}{E''} = \frac{\omega \tau_\sigma}{E_{II}(1 + \omega^2 \tau_\sigma^2)} \quad ; \quad \tan(\delta) = \frac{J''}{J'}$$

(les relations  $J' = 1/E'$  et  $J'' = 1/E''$  sont des approximations, valables loin de la 'fréquence de résonance'  $\omega = 1/\tau_\sigma$ )

SLSM sous déformation sinusoïdale :  $\varepsilon = \varepsilon_0 \sin(\omega t) \Rightarrow \sigma = \varepsilon_0 (E' \sin(\omega t) + E'' \cos(\omega t))$

$$E' = \left( \frac{E_I E_{II}}{E_I + E_{II}} \right) \left( 1 + \frac{E_I}{E_{II}} \frac{\omega^2 \tau_\varepsilon^2}{1 + \omega^2 \tau_\varepsilon^2} \right) \quad ; \quad E'' = \left( \frac{E_I^2}{E_I + E_{II}} \right) \left( \frac{\omega \tau_\varepsilon}{1 + \omega^2 \tau_\varepsilon^2} \right) \quad ; \quad \tan(\delta) = \frac{E''}{E'}$$

Energie dissipée par cycle par unité de volume :  $\Delta W = \pi \sigma_0^2 J''$  ou  $\Delta W = \pi \varepsilon_0^2 E''$

## Représentation complexe

Sollicitation :  $\varepsilon = \varepsilon_0 \exp\{i\omega t\}$ , réponse :  $\sigma = \sigma_0 \exp\{i(\omega t + \delta)\}$

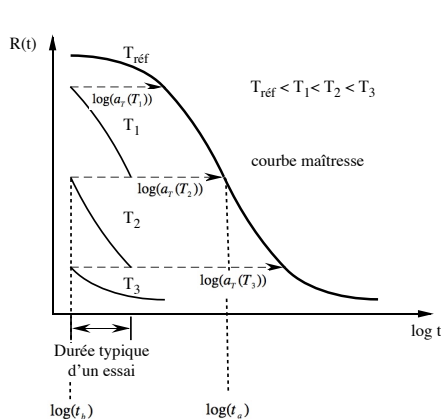
Modules apparents :  $E^* = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} (\cos(\delta) + i \sin(\delta)) = E' + iE''$   $J^* = \frac{\varepsilon_0}{\sigma_0} (\cos(\delta) - i \sin(\delta)) = J' - iJ''$   $\tan \delta = \frac{E''}{E'} = \frac{J''}{J'}$

## Modèles rhéologiques

Maxwell généralisé :  $R_V(t) = \sum_{i=0}^n E_i \exp\left\{-\frac{t}{\tau_{\varepsilon_i}}\right\}$  Kelvin généralisé :  $J_V(t) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{E_i} \left(1 - \exp\left\{-\frac{t}{\tau_{\sigma_i}}\right\}\right)$ ;  $0 < \tau_{\varepsilon_i} = \tau_{\sigma_i} = \frac{\eta_i}{E_i} < \infty$

KWW :  $R_V(t) = E_0 \exp\left\{-\left(\frac{t}{\tau_\varepsilon}\right)^\beta\right\}$   $0 < \beta < 1$

## Equivalence temps – température



$$R(t; T) = R(t/a_T; T_{ref}) \Leftrightarrow a_T = t/t_{ref}$$

$$a_T(T_2 \rightarrow T_{ref}) = a_T(T_2 \rightarrow T_1) \cdot a_T(T_1 \rightarrow T_{ref})$$

$$T < T_g \text{ (Arrhenius)} : \ln\{a_T\} = \ln\left\{\frac{\eta(T)}{\eta(T_{ref})}\right\} = \frac{E_a}{R} \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_{ref}}\right)$$

$$T_g < T < T_g + 100^\circ\text{C (WLF)} : \log_{10}\{a_T\} = -\frac{17.44(T - T_g)}{51.6 + (T - T_g)}$$

## Rhéologie des liquides – loi constitutives

Fluide Newtonien :  $\tau = \eta \dot{\gamma}$  où la viscosité  $\eta$  est indépendante de la vitesse de cisaillement  $\dot{\gamma}$

Fluide non-Newtonien :  $\tau = \eta(\dot{\gamma}) \dot{\gamma}$  où la viscosité  $\eta$  dépend de la vitesse de cisaillement  $\dot{\gamma}$

Loi de puissance :  $\tau = \kappa \dot{\gamma}^n$  et  $\eta = \tau/\dot{\gamma}$  (ou  $\eta = \sigma/\dot{\varepsilon}$ )

Modèle de Carreau	Modèle de Carreau-Yashuda	Modèle de Cross	Modèle de Ellis
$\frac{\eta - \eta_\infty}{\eta_0 - \eta_\infty} = \left[1 + (\lambda_c \dot{\gamma})^2\right]^{(n-1)/2}$	$\frac{\eta - \eta_\infty}{\eta_0 - \eta_\infty} = \left[1 + (\lambda_c \dot{\gamma})^k\right]^{(n-1)/k}$	$\frac{\eta - \eta_\infty}{\eta_0 - \eta_\infty} = \frac{1}{1 + (K \dot{\gamma})^{1-n}}$	$\frac{\eta}{\eta_0} = (1 + (K \dot{\gamma}))^{2(a-1)}$

Influences de la température  $T$  et de la pression  $P$  ( $A, \alpha, D$  constantes,  $E_a$  énergie d'activation,  $\chi$  compressibilité) :

$$\eta_0(T) = A \exp\left\{\frac{E_a}{RT}\right\} \quad \eta_0(P) = \alpha \exp\{\chi P\} \quad \eta_0(T; P) = D \exp\left\{\frac{E_a}{RT} + \chi P\right\}$$

## Ecoulements de fluides incompressibles (coordonnées cartésiennes)

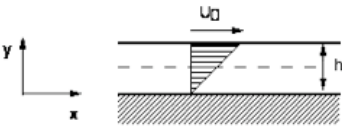
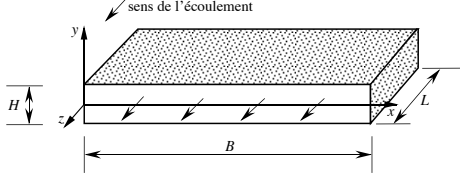
Equation de conservation de la masse :  $\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$

Equation de Navier-Stokes :

$$\text{Projection sur } x : \rho \left( \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \left( \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) + \rho f_x$$

$$\text{Projection sur } y : \rho \left( \frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \eta \left( \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \right) + \rho f_y$$

$$\text{Projection sur } z : \rho \left( \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \eta \left( \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right) + \rho f_z$$

Cisaillement	Poiseuille dans conduite rectangulaire
 $u_x(y) = \frac{U_0}{h} y$	 <p>Fluide newtonien : <math>u_z(y) = -\frac{\Delta P}{2\eta L} \left[ \left( \frac{H}{2} \right)^2 - y^2 \right]</math> <math>Q = -\frac{BH^3}{12} \frac{\Delta P}{\eta L}</math></p> <p>Fluide loi de puissance :</p> $u_z(y) = \left( -\frac{\Delta P}{\kappa L} \right)^{\frac{1}{n}} \frac{n}{n+1} \left[ \left( \frac{H}{2} \right)^{\frac{n+1}{n}} - y^{\frac{n+1}{n}} \right]$ $Q = \frac{nBH^2}{2(2n+1)} \left( -\frac{H\Delta P}{2\kappa L} \right)^{\frac{1}{n}}$

### Ecoulements de fluides incompressibles (coordonnées cylindriques)

Equation de conservation de la masse :  $\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_x}{\partial x} = 0$

Navier-Stokes :

Projection sur  $r$  :  $\rho \left( \frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta^2}{r} + u_x \frac{\partial u_r}{\partial x} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \eta \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru_r) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial x^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right] + \rho f_r$

Projection sur  $\theta$  :  $\rho \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_\theta u_r}{r} + u_x \frac{\partial u_\theta}{\partial x} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \eta \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru_\theta) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial x^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right] + \rho f_\theta$

Projection sur  $x$  :  $\rho \left( \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_x}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_x}{\partial \theta} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u_x}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_x}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} \right] + \rho f_x$

Ecoulement de Poiseuille dans une conduite circulaire (fluide Newtonien, gradient de pression selon  $x$ ) :

$$\tau = \frac{r}{2} \frac{dP}{dx} ; u_x(r) = -\frac{dP}{dx} \frac{R^2}{4\eta} \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right] ; Q = \left( -\frac{dP}{dx} \right) \left( \frac{\pi R^4}{4} \right) ; \eta_A = \frac{\tau_w}{\dot{\gamma}_A}$$

Ecoulement de Poiseuille dans une conduite circulaire (fluide loi de puissance, gradient de pression selon  $x$ ) :

$$u_x(r) = \left( \frac{-dP/dx}{2\kappa} \right)^{\frac{1}{n}} \left( R^{(1/n)+1} - r^{(1/n)+1} \right) ; Q = \left( \frac{-dP/dx}{2\kappa} \right)^{\frac{1}{n}} \left( \frac{\pi}{(1/n)+3} \right) R^{((1/n)+3)} ; \dot{\gamma}_A = \frac{4Q}{\pi R^3}$$

### Rhéomètres

Equation de Bagley :  $\tau_w = \frac{\Delta P}{2(L/R + |e|)}$  où  $|e|$  représente le facteur de correction

Equation de Rabinowitsch (capillaire) :  $b = \frac{d \ln \{ \dot{\gamma}_A \}}{d \ln \{ \tau_w \}} = \frac{1}{n} ; \dot{\gamma}_w = \dot{\gamma}_A \left( \frac{3n+1}{4n} \right) ; \eta = \frac{\tau_w}{\dot{\gamma}_w}$

Couette (Newtonien) (gap $\delta$ , rayon $R$ , longueur $L$ , couple $M$ , vitesse $\omega$ )	Cône-plaque (Newtonien) (angle $\alpha$ , rayon $R$ , couple $M$ , vitesse $\omega$ )	Plaques parallèles (Newtonien) (gap $d$ , rayon $R$ , couple $M$ , vitesse $\omega$ )
$\eta = \frac{\tau}{\dot{\gamma}} = \frac{M\delta}{2\pi R^3 L \omega}$	$\eta = \frac{\tau_w}{\dot{\gamma}_w} = \frac{3\alpha}{2\pi R^3} \frac{M}{\omega}$	$\eta = \frac{\tau_R}{\dot{\gamma}_R} = \frac{3Md}{2\pi \omega R^4}$

### Mécanique des fluides

Nombre de Reynolds :  $Re = \rho V d / \eta$

(vitesse du fluide  $V$ , densité  $\rho$ , viscosité  $\eta$ , dimension caractéristique de l'écoulement  $d$ )

$Re < 1000$  laminaire (si  $< 1$ , écoulement à faible Reynolds, ou de Stokes)

$10^3 < Re < 10^4$  transition

$10^4 < Re < 10^6$  turbulent, dépend de  $Re$

$10^6 < Re$ , très turbulent, ne dépend plus de  $Re$

Hauteur piézométrique (conduite cylindrique de rayon  $R = D/2$  et longueur  $L$ ) :  $h_g = \Delta z + \Delta P / \rho g = (2\tau_w L) / (\rho g R)$

Rayon hydraulique :  $R_h = A/P$  ( $A$  : aire ;  $P$  : périmètre)

Frottement :  $f = (8\tau_w) / (\rho \bar{V}^2) = (2h_g g D) / (L \bar{V}^2) = f(Re, \varepsilon/D)$  où  $\varepsilon$  : rugosité ;  $f = 64/Re$  (écoulement laminaire)

Equation de Colebrook :  $\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left\{ \frac{\varepsilon/D}{3.7} + \frac{2.51}{Re_d \sqrt{f}} \right\}$

Equation de Haaland :  $\frac{1}{\sqrt{f}} = -1.8 \log \left\{ \left( \frac{\varepsilon/D}{3.7} \right)^{1.11} + \frac{6.9}{Re_d} \right\}$

## Ecoulement autour de corps immergés

Couche limite  $\delta$  (lieu où la vitesse vaut 0.99 de la vitesse moyenne de l'écoulement  $V$ ) :

Cas laminaire :  $\frac{\delta}{x} \approx \frac{5.5}{\sqrt{\text{Re}_x}}$  et  $\text{Re}_x = \frac{\rho u_0 x}{\eta}$  ; cas turbulent (valable quand le corps n'est pas rugueux) :  $\frac{\delta}{x} \approx \frac{0.16}{\text{Re}_x^{1/7}}$

Coefficient de traînée :  $C_D = \frac{F_{\text{drag}}}{\frac{1}{2} \rho u^2 A}$  ; Coefficient de portance :  $C_L = \frac{F_{\text{lift}}}{\frac{1}{2} \rho u^2 A}$

( $F_{\text{drag}}$ ,  $F_{\text{lift}}$  forces de traînée et de portance,  $u$  vitesse de l'écoulement,  $A$  aire vue par l'écoulement ; attention ces coefficients dépendent de  $\text{Re}$ , mais sont à peu près constants pour  $\text{Re} > 10'000$ )

Loi de Stokes :  $F = 6\eta \pi V L$  ( $V$  vitesse du fluide,  $L$  taille du corps immergé) valable pour  $\text{Re} < 1$

## Rhéologie des fluides complexes – forces d'interaction

Coefficient de diffusion Brownien (taille des particules  $a$ ) :  $D = kT/6\pi\eta a$

Forces de Van der Waals entre 2 sphères ( $d$  : diamètre,  $h$  : séparation,  $A$  : Constante de Hamacker) :  $F_{\text{vw}} = -Ad/24h^2$

Nombre de Péclet :  $\text{Pe} = \frac{\text{convection}}{\text{diffusion}} = \frac{6\pi\eta\dot{\gamma}a^3}{kT}$

Nombre  $N_{\text{H/vdW}}$  (rapport des forces hydrodynamique et de van der Waals)  $\propto \frac{\eta\dot{\gamma}a^3}{A} \left(\frac{h}{d}\right)^2$

Potentiel électrostatique :  $\Psi = \Psi_0 e^{-\kappa x}$  où  $\kappa^{-1} = \sqrt{\frac{\epsilon_0 \epsilon kT}{2ne^2 z^2}}$  est la longueur de Debye

## Rhéologie des suspensions

Suspension diluée (concentration volumique  $\phi < 2\%$  ; Einstein) :  $\eta = \eta_0(1 + k_e \phi)$  où  $k_e = 2.5$  pour des sphères

Suspension semi-concentrée ( $2\% < \phi < 10\%$ ) :  $\eta_{\text{rel}} = 1 + 2.5\phi + k_H \phi^2 + \dots$  où  $k_H = 7.6$  si élongationnel  
5.2 si cisaillement

Modèle de Mooney  $\ln\{\eta_{\text{rel}}\} = \frac{k_e \phi}{1 - \phi/\phi_{\text{max}}}$  où  $\phi_{\text{max}} = 0.56$  à  $0.64$  pour des sphères

Suspension concentrée ( $\phi > 10\%$  ; Krieger-Dougherty) :  $\eta_{\text{rel}} = \left(1 - \frac{\phi}{\phi_{\text{max}}}\right)^{[\eta]\phi_{\text{max}}} = \left(1 - \frac{\phi}{\phi_{\text{max}}}\right)^{-2.5\phi_{\text{max}}}$   
( $[\eta]$  viscosité intrinsèque = 2.5 et  $\phi_{\text{max}} = 0.56$  à  $0.64$  pour des sphères)

Ellipsoïdes (axes  $a$ ,  $b$  ; équation de Simba) :  $[\eta] = \frac{a_r^2}{15(\ln(2a_r) - \lambda)} + \frac{a_r^2}{5(\ln(2a_r) - \lambda + 1)} + \frac{14}{15}$  où  $\lambda = \frac{a_r^2 - 1}{a_r^2 + 1}$   
 $a_r = a/b$  et  $\lambda = 1.5$  (1.8 pour une fibre)

Modèle de Bingham :  $\dot{\gamma} = 0$  si  $\tau < \tau_0$  et  $\eta = \tau_0/\dot{\gamma} + \eta_N$  si  $\tau > \tau_0$  où  $\eta_N$  est la viscosité newtonienne

Modèle de Herschel-Bulkley :  $\dot{\gamma} = 0$  si  $\tau < \tau_0$  et  $\eta = \tau_0/\dot{\gamma} + \kappa \dot{\gamma}^{n-1}$  si  $\tau > \tau_0$

